MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 2
25.04.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011)*
   Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren
   $$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \text{ bzw. } c_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$
   gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

   b) Bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sei die lineare Abbildung $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix
   $$P = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$
   gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix P' für f_P bezüglich der Basen aus a).

   Hinweis:
   Verwenden Sie Satz 7.27.

2. Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \text{ bzw. } w_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$
   sowie die Matrix $A = \begin{pmatrix}9 & 13 & 3\\4 & 5 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die darstellende Matrix A' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen.

   b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1.

c) Gegeben sei die in Teilaufgabe a) berechnete darstellende Matrix A' bezüglich der beiden Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2. Bestimmen Sie noch einmal die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1. Verwenden Sie nun die Formel für den Basiswechsel (7.28) und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe b)

Hinweis:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012)*

Sei π die lineare Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ ist $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$.

b) $\mathrm{Kern}(\pi) \cap \mathrm{Bild}(\pi) = \{0\}$.

c) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Kern}(\pi) + \mathrm{Bild}(\pi)$.

Hinweis:
Bei Teilaufgabe b) ist zu zeigen, dass die Implikation $w \in \mathrm{Kern}(\pi) \cap \mathrm{Bild}(\pi) \Rightarrow w = 0$ gilt (Wieso?). Dies kann durch geschicktes Anwenden von Teilaufgabe a) gezeigt werden. Teilaufgabe c) kann mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen und Teilaufgabe b) gelöst werden.

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X).$$

a) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

b) Man entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

Hinweis:
In Satz 7.31 wurde gezeigt, dass f genau dann injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, wenn l_A injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.